

10. cvičení - řešení

Příklad 1 (d) $W = \{A \in M(n \times n) : A \text{ regulární}\}, X = M(n \times n)$

Matice $A \in M(n \times n)$ je regulární právě tehdy, když její hodnost je rovna číslu n . Existují matice A, B takové, že jsou regulární a jejich součet regulární není - např. pokud první řádek matice B je první řádek A přenásobený číslem (-1) . Pak $A + B \notin W$.

Příklad 1 (e) $W = \{A \in M(n \times n) : \det A = 0\}, X = M(n \times n)$

Víme, že máme-li diagonální matici, tak její determinant je roven součinu prvků na diagonále. Z toho plyne, že má-li diagonální matice nulový determinant, pak musí mít alespoň jeden prvek na diagonále nulový. Vezmeme-li za matici A diagonální matici, která má na diagonále postupně 0 a pak samé 1, a diagonální matici B , která má na diagonále postupně 1, 0, 1 a dále samé 1, tak platí, že $A, B \in W, A + B \notin W$, neb matice W je diagonální a na diagonále má 1, 1, 2, 2, ...

Příklad 2 (a) $(1, 0, -1, 1)^T, (2, 1, 0, 1)^T, (1, 0, 0, -1)^T, (2, 1, 1, 1)^T$

Uvažme $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zkusme ukázat, že pak nutně $a = b = c = d = 0$.

Dostáváme soustavu s nulovou pravou stranou, jež se dá reprezentovat maticí následujícím způsobem.

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c & 2d \\ 0 & b & 0 & d \\ -a & 0 & 0 & d \\ a & b & -c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2b & c & 3d \\ 0 & b & 0 & d \\ -a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & -c & 2d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & b & 0 & d \\ -a & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2d \\ 0 & b & 0 & d \\ -a & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -c & d \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že jediným řešením dané soustavy je $a = b = c = d = 0$. Dostáváme, že zadané vektory jsou LN.

Příklad 2 (b) $\sin x, \cos x, \sin 2x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \sin x + b \cos x + c \sin 2x = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$x = 0 \implies a \cdot \sin 0 + b \cdot \cos 0 + c \cdot \sin(2 \cdot 0) = b = 0 \implies b = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \implies a \cdot \sin \frac{\pi}{2} + c \cdot \sin \pi = 0 \implies ac \cdot 0 = 0 \implies a = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \implies c \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0 \implies c \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0 \implies c = 0$$

Dostáváme, že nutně $a = b = c = 0$, tedy vektory jsou LN.

Příklad 2 (c) $\sin x, \cos x, \sin x \cos x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Analogicky k 2 (b).

Příklad 3 (a) $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 1, 1, 2, 2), (-1, -2, -2, -2, 2), (19, 1, 1, 1, 1), (-1, -3, -3, -2, 6)\}$

Známe generátor daného prostoru, nyní je potřeba z těchto vektorů vybrat bázi - tedy nám zde stačí vybrat maximální podmnožinu, která je LN.

Postupně: množina $\{(1, 1, 1, 2, 2)\}$ je LN. Zkusme, zda tam můžeme přidat další vektor z generátoru. Vektory $(1, 1, 1, 2, 2), (-1, -2, -2, -2, 2)$, tedy druhý vektor přidáme do naší báze. Zkusme, zda můžeme přidat vektor $(19, 1, 1, 1, 1)$.

Uvažme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že $a(1, 1, 1, 2, 2) + b(-1, -2, -2, -2, 2) + c(19, 1, 1, 1, 1) = \vec{0}$ a zkusme ukázat, že pak nutně $a = b = c = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 19 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Z posledního řádku plyne, že $b = 0$. Pak z prvního řádku plyne, že $c = 0$. Z druhého řádku pak dostáváme, že i $a = 0$.

Tedy vektor $(19, 1, 1, 1, 1)$ můžeme přidat do báze. Zbývá ověřit, zda vektory $(1, 1, 1, 2, 2), (-1, -2, -2, -2, 2), (19, 1, 1, 1, 1)$ jsou LN či nikoli.

Podobně jako před chvílí dostáváme:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 19 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. řádek $\implies c = 0$, 4. ř. $\implies b = -2d$, 2. ř. $\implies a + 4d - 3d = 0 \implies a = -d$. Vidíme, že původní rovnici řeší např. $a = -1, b = -2, c = 0, d = 1$. Tedy zkoumané vektory nejsou LN.

Dostáváme: báze je $\{(1, 1, 1, 2, 2), (-1, -2, -2, -2, 2), (19, 1, 1, 1, 1)\}$ a dimenze je tedy 3.

Příklad 3 (b) $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{x + 7, x^2 - x - 1, x^2 + 3, x - 5\}$

Podobně jako v 3 (a). Začneme tvořit bázi. Zřejmě tam můžeme přidat $x + 7$ a $x^2 - x - 1$, který není skalárním násobkem polynomu $x + 7$. Nyní zkusme přidat vektor $x^2 + 3$.

$$a(x + 7) + b(x^2 - x - 1) + c(x^2 + 3) = 0$$

$$ax + 7a + bx^2 - bx - b + cx^2 + 3x = 0$$

$$(b + c)x^2 + (a - b + c + 3)x + (7a - b) = 0$$

Rovnost má platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Polynom je konstantní nula právě tehdy, když má všechny koeficienty nulové.

$$b = -c$$

$$a - b + c + 3 = 0$$

$$7a = b$$

tedy

$$\begin{aligned}b &= 7a \\ -6a + c + 3 &= 0 \\ c &= -b\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned}b &= 7a \\ c &= -b \\ -6a - 7a + 3 &= 0 \implies a = 0, b = 0, c = 0\end{aligned}$$

Vektory jsou tedy LN.

Zkusme ještě přidat vektor $x - 5$.

$$\begin{aligned}a(x + 7) + b(x^2 - x - 1) + c(x^2 + 3) + d(x - 5) &= 0 \\ ax + 7a + bx^2 - bx - b + cx^2 + 3x + dx - 5d &= 0 \\ (b + c)x^2 + (a - b + c + 3 + d)x + (7a - b - 5d) &= 0\end{aligned}$$

Polynom je konstantní nula právě tehdy, když má všechny koeficienty nulové. Dostáváme:

$$\begin{aligned}b + c &= 0 \\ a - b + c + d &= -3 \\ 7a - b - 5d &= 0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & -12 & 21 \end{array} \right)$$

$$1.\text{ř.} \implies b = -c, 3.\text{ř.} \implies -13c - 12d = 21 \implies 12d = -13c - 21 \implies d = \frac{-13c-21}{12}$$

$$2.\text{ř.} \implies a - b + c + d = -3 \implies a + 2c + d = -3 \implies a = -3 - 2c - d = -3 - 2c + \frac{13c+21}{12} = \frac{-36-24c+13c+21}{12} = \frac{-15-11c}{12}.$$

Soustava má nenulové řešení - např. $c = 1, b = -1, d = -\frac{17}{6}, a = -\frac{13}{6}$. Ted testované vektory nejsou LN.

Báze: $\{x + 7, x^2 - x - 1, x^2 + 3\}$, dimenze: 3

Příklad 3 (c) $\{A \in M(3 \times 3) : A^T = A\}$

Jde o symetrické matice. Zjevně na diagonále může být cokoli a jinde to musí být symetrické podle diagonály. Dá se snadno ověřit, že báze je:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Příklad 3 (d)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\} = \{(-y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$$

Příklad 4 (a) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, L(u, v, w) = (u, u - w, u + v, v)$

Linearitu lze snadno ověřit. Jádro je zřejmě $\{(0, 0, 0)\}$

Obraz je lineární obal obrazů vektorů báze - např. kanonických vektorů $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Tedy jde o lin. obal vektorů $(1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, -1, 0, 0)$, které jsou LN.

Příklad 4 (c) $L: \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), L(f)(x) = f(x+1) - f(x)$

Nechť $a \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pak $L(f+g)(x) = (f+g)(x+1) - (f+g)(x) = f(x+1) + g(x+1) - (f(x) + g(x)) = f(x+1) - f(x) + g(x+1) - g(x) = (L(f) + L(g))(x)$ a $L(a \cdot f)(x) = (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) = a \cdot L(f)(x)$. L je tedy lineární zob.

$\text{Ker } L = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}): f(x+1) - f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}): f(x+1) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}): f \text{ je 1-periodická}\}.$

Zkusme ukázat, že pro každé $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ existuje funkce $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ taková, že $L(f) = g$. Chceme tedy, že $f(x+1) = g(x) + f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pokud bychom předepsali nějak chování funkce f na intervalu $[0, 1)$, tak z předpisu $f(x+1) = g(x) + f(x)$ víme jednoznačně chování funkce f na intervalu $[1, 2)$, podobně odvodíme chování funkce f na intervalu $[2, 3), [3, 4)$ atd. Tímto způsobem lze postupovat i na druhou stranu, tedy pomocí hodnot f na $[0, 1)$ lze definovat f i na $[-1, 0)$, pak na $[-2, -1), [-3, -2)$ atd. Vlastně můžeme induktivně definovat pak funkci f na celém $\mathbb{R}$.

Pokud by se nám podařilo funkci f definovat na $[0, 1)$ tak, aby byla spojitá na intervalu $[0, 1]$, tak pak bude funkce f spojitá i na všech ostatních intervalech, tedy lze snadno ukázat, že bude f spojitá na $\mathbb{R}$.

Platí, že $f(1) = g(0) + f(0)$. Definujme tedy funkci f na $[0, 1)$ jako $f(x) = x \cdot g(0)$. Pak $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x \cdot g(0) = g(0) = g(0) + f(0) = f(1)$. Z toho plyne, že funkce f je spojitá na $[0, 1]$ z definice a je spojitá zleva v bodě 1 dle výpočtu. Tedy f je spojitá na $[0, 1]$.

Ukažme, jak by se ukázalo, že je funkce f spojitá na intervalu $[1, 2]$ - zbytek intervalů by se ověřil analogicky.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x-1) + f(x-1) \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) + f(x) \stackrel{f, g \text{ spojité v } 0 \text{ zprava}}{=} g(0) + f(0) = f(1)$$

To nám dává spojitost f v 1 zprava.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} g(x-1) + f(x-1) \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + g(x) \stackrel{f, g \text{ spojité v } 1 \text{ zleva}}{=} f(1) + g(1) = f(2)$$

To nám dává spojitost f v 2 zleva. Nechť $a \in (1, 2)$ Pak $a-1 \in (0, 1)$. Pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x-1) + f(x-1) \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \lim_{x \rightarrow a-1} f(x) + g(x) \stackrel{f, g \text{ spojité v } a-1}{=} f(a-1) + g(a-1) = f(a)$.

Příklad 4 (d) $L: \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), L(f)(x) = \int_0^x f(y) dy$

Nechť $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$. Pak $\int (f+g) = \int f + \int g$, tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $L(f+g)(x) = \int_0^x (f+g)(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = L(f)(x) + L(g)(x)$ a podobně se ukáže $L(a \cdot f) = a \cdot L(f)$.

$$L(f) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}: \int_0^x f(t) dt = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}: F(x) - F(0) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}: F(x) = F(0)$$

Tedy $L(f) = 0$ právě tehdy, když f má primitivní funkci konstantní. Derivace primitivní funkce k f nám dá f , tedy $f = 0' = 0$, tedy f je konstantní nula.

$F = \int f$, tedy $F' = f$. Zřejmě pro každé $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ existuje $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ takové, že $L(f) = F(x) - F(0) = g(x)$, pokud $g(0) = 0$.

Příklad 5 (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Pomocí symetrických úprav převedeme na diagonální tvar a určíme definitnost.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: II}' = \text{II}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: III}' = \text{III}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \\
\xrightarrow{\text{sym. ú.: II}' = \text{II}+\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: III}' = \text{III}-1/2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dostáváme, že A je ID.

Příklad 5 (f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

Stejný postup.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: II}' = \text{II}-\text{III}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: IV}' = \text{IV}-\text{I}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} \sim \\
\xrightarrow{\text{sym. ú.: III}' = \text{III}-4/3\text{I}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: IV}' = \text{IV}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\
\xrightarrow{\text{sym. ú.: III}' = 1/2\text{II}+\text{III}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy A je PSD.

Příklad 6 (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = \pm a$$

- $a = 0 \implies \lambda = 0$ a zřejmě vlastními vektory jsou všechny vektory
- $a \neq 0 \implies \lambda = \pm a$

$$\lambda = a \implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} -a & a \\ aa & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy vlastními vektory jsou $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 1)\}$

$$\lambda = -a \implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$

tedy zřejmě vlastními vektory jsou $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{(-1, 1)\}$

Příklad 6 (c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -\lambda & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} &= (-1)^{2+2}(1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -5 & -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \left((-2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (1-\lambda)((-2-\lambda)(-\lambda(6-\lambda)+6) + 2(-12+2\lambda+9) - 5(-4+3\lambda)) = \\ &= (1-\lambda)((-2-\lambda)(-6\lambda+\lambda^2+6) + 2(2\lambda-3) + 20-15\lambda) = \\ &= (1-\lambda)(12\lambda-2\lambda^2-12+6\lambda^2-\lambda^3-6\lambda+4\lambda-6+20-15\lambda) = \\ &= (1-\lambda)(-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2) = (1-\lambda)^3(\lambda-2) \end{aligned}$$

Vlastní čísla: $\lambda = 1$ násobnosti 3, $\lambda = 2$ násobnosti 1.

$\lambda = 1 \implies$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2-1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1-1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 6-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vidíme, že $\text{Ker}(A - 1I) = \{(s, 0, t, s) : s, t \in \mathbb{C}\} =$

$\lambda = 2 \implies$

$$\begin{pmatrix} -2-2 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1-2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(A - 2I) = \{(t, t, t, 2t) : t \in \mathbb{C}\}$$

Příklad 7 (a)
$$\begin{pmatrix} 337 & 338 & 400 & 398 \\ 338 & 415 & 371 & 399 \\ 400 & 371 & 333 & 343 \\ 398 & 399 & 343 & a \end{pmatrix}$$

Postupujeme pomocí Sylvesterovy kritéria.

$$\det(337) > 0$$

$$\begin{vmatrix} 337 & 338 \\ 338 & 415 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 337 & 338 & 400 \\ 338 & 415 & 371 \\ 400 & 371 & 333 \end{vmatrix} = 337 \begin{vmatrix} 415 & 371 \\ 371 & 333 \end{vmatrix} - 338 \begin{vmatrix} 338 & 400 \\ 371 & 333 \end{vmatrix} + 400 \begin{vmatrix} 338 & 400 \\ 415 & 371 \end{vmatrix} < 0$$

Ze Sylvesterova kritéria plyne, že matice není ani ND (první determinant nevychází záporný), ani PD (poslední determinant není kladný), ani PSD (třetí determinant nevychází nezáporný), ani NSD (první determinant nevychází záporný). Tedy matice je ID nezávisle na hodnotě a .